Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que permetin emmagatzemar dades o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin les matrius $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N}$ i comproveu que la matriu resultant no és invertible.
[1 punt]

b) Trobeu els valors de t per als quals la matriu $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{M}$ és invertible.
[1 punt]

2. Sigui r la recta que passa pels punts $A = (0, 1, 1)$ i $B = (1, 1, -1)$.

a) Trobeu l'equació paramètrica de la recta r.
[1 punt]

b) Calculeu tots els punts de la recta r que estan a la mateixa distància dels plans π_1: $x + y = -2$ i π_2: $x - z = 1$.
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Sigui la funció $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació $x + 3y = 0$.
[1 punt]

b) Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.
[1 punt]

4. Considereu els punts $P=(3,-2,1)$, $Q=(5,0,3)$, $R=(1,2,3)$ i la recta $r\colon \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2y+3z-5=0 \end{cases}$.

a) Determineu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla que passa per P i Q i és paral·lel a la recta r.

[1 punt]

b) Donats el pla $x+2y+m\cdot z=7$ i el pla que passa per P, Q i R, trobeu m perquè siguin paral·lels i no coincidents.

[1 punt]

5. Sigui la funció $f(x)=\sqrt{x}+x-2$.

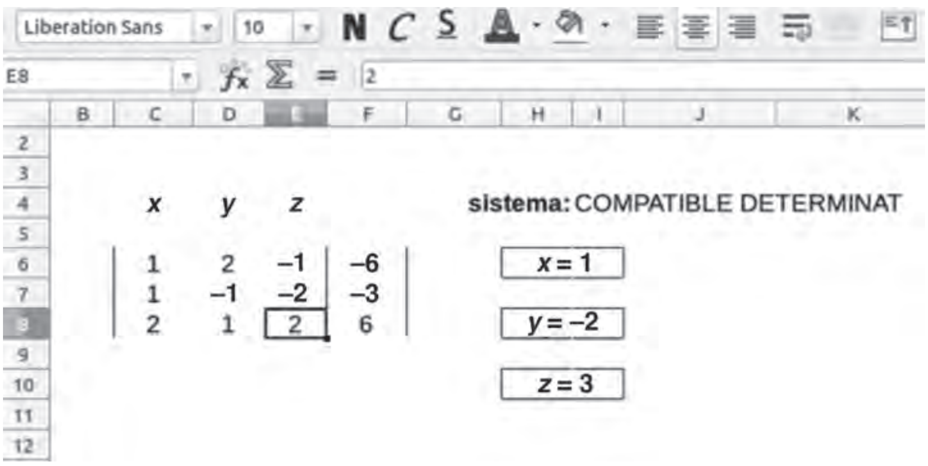
a) Comproveu que la funció $f(x)$ compleix l'enunciat del teorema de Bolzano a l'interval $[0,2]$ i que, per tant, l'equació $f(x)=0$ té alguna solució a l'interval $(0,2)$. Comproveu que $x=1$ és una solució de l'equació $f(x)=0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'(x)$, que la solució és única.

[1 punt]

b) A partir del resultat final de l'apartat anterior, trobeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x=0$ i $x=1$.

[1 punt]

6. Uns estudiants de batxillerat han programat un full de càlcul com el de la figura següent que dona la solució d'un sistema d'equacions compatible determinat d'una manera automàtica:



a) Escriviu el sistema i comproveu que els valors proposats com a solució són correctes.

[1 punt]

b) Quin valor s'hauria de posar en lloc del 2 que està emmarcat en la imatge, corresponent a la cel·la E8 (a_{33} de la matriu de coeficients), perquè el sistema fos incompatible?

[1 punt]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que permetin emmagatzemar dades o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} 6x+3y+2z=5 \\ 3x+4y+6z=3 \\ x+3y+2z=m \end{cases}$, per a $m \in \mathbb{R}$.

a) Expliqueu raonadament que per a qualsevol valor del paràmetre m el sistema té una única solució.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema i trobeu l'expressió general del punt solució.

[1 punt]

2. Siguin el pla d'equació π: $x+y-z=0$ i el punt $P=(2,3,2)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla π.

[1 punt]

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) dels dos plans paral·lels a π que estan a una distància $\sqrt{3}$ del punt P.

[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$$Ax+By+Cz+D=0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3. Sigui la funció $f(x)=a\cdot \mathrm{e}^{-x^2+bx}$, amb $a\neq 0$ i $b\neq 0$.

a) Calculeu els valors de a i de b que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1, \mathrm{e})$.

[1 punt]

b) Per al cas $a=3$ i $b=5$, calculeu l'asímptota horitzontal de la funció f quan x tendeix a $+\infty$.

[1 punt]

4. Sabem que una funció $f(x)$ està definida per a tots els nombres reals i que és derivable dues vegades. Sabem també que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 2$, que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en aquest punt és $y = -124x + 249$ i que $f(-3) = -4$.

a) Calculeu $f''(2), f'(2)$ i $f(2)$.
[1 punt]

b) Calculeu $\int_{-3}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x$.
[1 punt]

5. Siguin les rectes r_1: $x-1=\dfrac{y-2}{-1}=z-5$ i r_2: $(x, y, z) = (2 - 3\lambda, -1 + \lambda, 2)$.

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que conté la recta r_1 i és paral·lel a la recta r_2.
[1 punt]

b) Digueu quina condició s'ha de complir perquè existeixi un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2. Amb les rectes r_1 i r_2 de l'enunciat, comproveu si existeix un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2.
[1 punt]

6. Considereu la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Si $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat d'ordre 3, calculeu per a quins valors de k la matriu $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{I}$ té inversa. Trobeu, si existeix, la matriu inversa de $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$.
[1 punt]

b) Calculeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà l'equació $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = 2 \cdot \boldsymbol{X}$, en què $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ és la matriu transposada de la matriu $\boldsymbol{A}$.
[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés